Communications in Mathematics 29 (2021) 407–430
DOI: 10.2478/cm-2020-0021

Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires

Michel Balazard, Leila Benferhat, Mihoub Bouderbala

Abstract. Let $b > a > 0$. We prove the following asymptotic formula

$$\sum_{n\geqslant 0} \bigl|\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}\bigr| = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + O(c^{2/9}x^{4/9}),$$

with $c = b - a$, uniformly for $x \geqslant 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$.

1 Introduction

Notons $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ la partie fractionnaire du nombre réel t, où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t. Pour $x > 0$ et $b > a > 0$, les différences de parties fractionnaires

$$\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sont les termes d'une série absolument convergente, puisque, pour $n > x - a$, cette différence vaut $cx/(n+a)(n+b)$, avec

$$c = b - a,$$

notation que nous conserverons dans tout cet article. On peut donc considérer la norme au sens ℓ^1 de cette suite, c'est-à-dire la quantité

$$W(x; a, b) = \sum_{n\geqslant 0} \bigl|\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}\bigr|.$$

2020 MSC: 11N37
Key words: Fractional part, Elementary methods, van der Corput estimates
Affiliation:
BALAZARD, Michel – Institut de Mathématiques de Marseille, CNRS, Université d'Aix-Marseille, Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, FRANCE
E-mail: balazard@math.cnrs.fr
BENFERHAT, Leila – Institut de Mathématiques-USTHB, LA3C, Université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène, Bab Ezzouar, ALGÉRIE
E-mail: lbenferhat@hotmail.com
BOUDERBALA, Mihoub – Institut de Mathématiques-USTHB, LA3C, Université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène, Bab Ezzouar, ALGÉRIE
E-mail: mihoub75bouder@gmail.com

La somme $W(x;1,2)$ joue un rôle auxiliaire dans l'article [5] de Wintner. Il y démontra l'ordre de grandeur $W(x;1,2) \asymp \sqrt{x}$ (pour $x \geqslant 1$), et en déduisit l'optimalité de l'estimation $O(\sqrt{x})$ pour le terme d'erreur de formules asymptotiques pour certaines moyennes arithmétiques. L'estimation de Wintner a été précisée par le premier auteur : on a

$$W(x;1,2) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{x} + O(x^{2/5}) \quad (x > 0), \tag{1}$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann (cf. [1]).

Le but du présent article est de généraliser (1) à la somme $W(x;a,b)$. Afin d'énoncer notre premier résultat, il nous faut introduire les quantités

$$R_0(x;a,b) = \frac{c}{x}\sum_{1\leqslant k\leqslant K(x/c)} k^2\big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big) \tag{2}$$

$$R_j(x;a,b) = \sum_{K_{j-1}(x/c)<k\leqslant K_{j+1}(x/c)} (k^2c/x-j)\big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big) \quad (j\in\mathbb{N}^*), \tag{3}$$

où, pour $t>0$ et $j\in\mathbb{N}$, nous notons

- $K(t)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1)\leqslant t$;
- $K_j(t)$ le plus grand nombre entier $k\geqslant j$ tel que $(k-j)k\leqslant jt$ (en particulier, $K_0(t)=0$).

Enfin, nous posons, pour J réel et positif,

$$\mathcal{R}(J,x;a,b) = \sum_{0\leqslant j\leqslant J} R_j(x;a,b).$$

Observons que, pour c entier, en particulier si $a=1$ et $b=2$, les quantités $R_j(x;a,b)$ sont nulles ; elles ne jouaient donc aucun rôle dans l'étude effectuée dans [1]. Notre premier résultat est une généralisation de (1).

Théorème A . *Pour $x \geqslant 40c^{-3}(1+b)^4$, on a*

$$W(x;a,b) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J,x;a,b) + O\big((1+b)^{2/5}c^{1/5}x^{2/5}\big),$$

où $J = c^{3/5}(1+b)^{-4/5}x^{1/5}$.

La somme $\mathcal{R}(J,x;a,b)$ peut être estimée grâce aux résultats classiques de van der Corput, obtenus grâce à l'utilisation de sommes trigonométriques. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème B . *Pour $x \geqslant 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$,*

$$W(x;a,b) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + O(c^{2/9}x^{4/9}).$$

Observons que l'on en déduit l'estimation $W(x;a,b) \ll \sqrt{cx}$ sous la même hypothèse.

La quantité $W(x;a,b)$ est reliée à la suivante, définie pour $x > 0$ et $b > a > 0$ par

$$V(x;a,b) = \sum_{n\geqslant 0} \bigl(\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}\bigr).$$

On a $V(x;1,2) = \{x\}$ et, plus généralement,

$$V(x;a,b) = \{x/a\} + \cdots + \{x/(b-1)\}$$

si $c = b - a$ est entier, mais l'estimation de $V(x;a,b)$ dans le cas général est un problème non trivial.

Cette somme intervient dans l'étude de la question suivante. Soit f une fonction arithmétique de période $q \in \mathbb{N}^*$, et de moyenne nulle. Sa fonction sommatoire F est donc aussi périodique, de période q. Considérons le produit de convolution $g = f * \mathbf{1}$. On a alors

$$G(x) = \sum_{n\leqslant x} g(n) = \sum_{n\geqslant 1} f(n)\lfloor x/n\rfloor = Cx - \Delta(x),$$

où $C = \sum_{n\geqslant 1} f(n)/n$ et

$$\begin{aligned}\Delta(x) = \sum_{n\geqslant 1} f(n)\{x/n\} = \sum_{n\geqslant 1} F(n)\bigl(\{x/n\} - \{x/(n+1)\}\bigr) = \\ \sum_{k=1}^{q} F(k) \sum_{j\geqslant 0} \bigl(\{x/(jq+k)\} - \{x/(jq+k+1)\}\bigr) \\ = \sum_{k=1}^{q} F(k) V\bigl(x/q; k/q, (k+1)/q\bigr).\end{aligned}$$

La connaissance du comportement de $V(x;a,b)$ est donc susceptible d'apporter des informations sur celui du terme d'erreur $\Delta(x)$. La méthode de démonstration des théorèmes A et B ci-dessus s'applique également à l'étude de la somme $V(x;a,b)$. Cela étant, la forme plus simple de cette quantité, relativement à $W(x;a,b)$, se prête *a priori* à un traitement élémentaire classique via la méthode de l'hyperbole, suivi d'une application de la théorie de van der Corput, ou à une étude analytique à l'aide de la fonction ζ d'Hurwitz. Pour conserver au présent texte une unité méthodologique, nous n'y abordons donc pas l'étude de $V(x;a,b)$, nous contentant de signaler ici la majoration évidente $|V(x;a,b)| \leqslant W(x;a,b)$. En particulier, en utilisant la majoration $W(x;a,b) \ll \sqrt{cx}$, valable sous les conditions du Théorème B, on obtient l'estimation uniforme

$$\Delta(x) \ll \frac{\sum_{k=1}^{q} |F(k)|}{q} \sqrt{x} \quad (1 \leqslant q \leqslant x^{1/6}/22).$$

L'étude de $V(x;a,b)$ pourrait permettre de préciser ce résultat.

Le plan de cet article est le suivant. Au §2, nous décomposons $W(x;a,b)$ en somme de quantités $W_j(x;a,b)$, regroupant les entiers n tels que

$$\lfloor x/(n+a)\rfloor - \lfloor x/(n+b)\rfloor = j \quad (j \in \mathbb{N}),$$

et nous donnons des expressions de $W_j(x;a,b)$ (formules (8) au §2.2, et (21) au §2.9). Au §3, nous donnons des estimations des quantités $W_j(x;a,b)$, faisant intervenir les sommes $R_j(x;a,b)$ définies par (2) et (3) ci-dessus. Nous en déduisons le Théorème A au §4. Enfin, au §5, nous exposons quelques éléments de la théorie de van der Corput ; ils sont ensuite utilisés pour estimer les quantités $R_j(x;a,b)$. Cela nous permet d'obtenir le Théorème B.

2 Décomposition de la somme $W(x;a,b)$

Comme x, a et b sont fixés dans ce paragraphe et les paragraphes 3 et 4, nous allégeons la notation en écrivant simplement W au lieu de $W(x;a,b)$, et nous adopterons la même convention pour les quantités et ensembles, dépendant de x, a et b, intervenant dans la démonstration. Les lettres j, k, h, n désigneront toujours des variables entières positives ou nulles.

2.1 Les sommes W_j

En utilisant la notation d'Iverson ($[P]=1$ si la propriété P est vraie, $[P]=0$ sinon), posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$W_j = \sum_{n\geqslant 0} [\lfloor x/(n+a)\rfloor - \lfloor x/(n+b)\rfloor = j] \cdot \big|\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}\big|,$$

de sorte que

$$W = \sum_{j\in\mathbb{N}} W_j.$$

Nous allons évaluer W_j en suivant la méthode adoptée dans [1]. Par souci de lisibilité, nous reproduisons, *mutatis mutandis*, les détails des transformations opérées sur ces sommes.

Pour commencer, les relations

$$\begin{aligned} k &= \lfloor x/(n+a)\rfloor \\ h &= \lfloor x/(n+b)\rfloor \end{aligned}$$

entraînent $0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x/a$ et équivalent à

$$\begin{aligned} k \leqslant x/(n+a) &< k+1 \\ h \leqslant x/(n+b) &< h+1, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\max\Big(\frac{x}{k+1} - a, \frac{x}{h+1} - b\Big) < n \leqslant \min\Big(\frac{x}{k} - a, \frac{x}{h} - b\Big). \tag{4}$$

(avec la convention $x/0 = \infty$).

Nous désignerons par $I(h,k)$ l'intervalle de valeurs de n défini par l'encadrement (4), c'est-à-dire

$$I(h,k) = \mathbb{N} \cap]x/(k+1) - a, x/k - a] \cap]x/(h+1) - b, x/h - b].$$

La collection des $I(h,k)$ non vides constitue une partition de $\mathbb{N}$.

Notons que, pour $n \in I(h,k)$, on a

$$\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} = cx/(n+a)(n+b) - k + h\,,$$

où nous rappelons que c désigne la différence $b-a$. En particulier,

$$0 \leqslant k - h < y + 1,$$

où l'on a posé $y = cx/ab$.

La somme W_j est donc nulle si $j \geqslant y+1$. Posons

$$W(h,k) = \sum_{n \in I(h,k)} \big| cx/(n+a)(n+b) - k + h \big|$$

et, pour $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant j < y+1$,

$$\begin{aligned} E_j &= \{(h,k) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x/a,\ k-h=j\} \\ &= \{(k-j,k),\ k \in \mathbb{N},\ j \leqslant k \leqslant x/a\} \end{aligned} \tag{5}$$

Nous aurons

$$W_j = \sum_{(h,k) \in E_j} W(h,k).$$

Nous allons établir une expression de la somme W_j, en commençant par le cas $j = 0$.

2.2 Expression de W_0

Nous avons

$$E_0 = \{(k,k),\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant x/a\}.$$

L'intervalle $I(k,k)$ de $\mathbb{N}$ est défini par l'encadrement

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leqslant \frac{x}{k} - b. \tag{6}$$

Il est vide si $k(k+1) > x/c$. Pour $t > 0$, désignons par $K(t)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leqslant t$, et observons simplement, pour l'instant, que $K(t) \leqslant \sqrt{t}$.

Posons également

$$F(t) = \sum_{n>t} 1/(n+a)(n+b) \quad (t \geqslant 0) \tag{7}$$

et, par convention,

$$F(\infty) = 0$$
$$F(t) = F(0^-) = \sum_{n \geqslant 0} 1/(n+a)(n+b) \quad (t < 0).$$

Pour $x \geqslant a^2/c$, en notant $K = K(x/c)$, on aura $K \leqslant \sqrt{x/c} \leqslant x/a$, donc

$$\begin{aligned} W_0 &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} W(k,k) \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \ \sum_{x/(k+1)-a < n \leqslant x/k - b} cx/(n+a)(n+b) \\ &= cx \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \Big(F\big(x/(k+1) - a\big) - F(x/k - b) \Big) \\ &= cxF\big(x/(K+1) - a\big) + cx \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \big(F(x/k - a) - F(x/k - b) \big). \end{aligned} \tag{8}$$

2.3 Décomposition de l'ensemble E_j

Nous supposons maintenant $j \geqslant 1$. Toujours en adaptant la démarche suivie dans [1], nous allons décomposer l'ensemble E_j défini par (5) en une partition de trois sous-ensembles sur lesquels l'encadrement (4) s'exprimera sans recours aux fonctions max et min.

Si $k > h \geqslant 0$ et $x > 0$, l'inégalité

$$\frac{x}{k} - a \leqslant \frac{x}{h} - b$$

équivaut à

$$\frac{hk}{k-h} \leqslant x/c.$$

En particulier, on a les implications

$$\frac{x}{k+1} - a \leqslant \frac{x}{h+1} - b \Longrightarrow \frac{x}{k} - a \leqslant \frac{x}{h} - b$$

et

$$\frac{x}{k} - a > \frac{x}{h} - b \Longrightarrow \frac{x}{k+1} - a > \frac{x}{h+1} - b.$$

Nous considérons donc les trois parties suivantes de E_j (la définition de chaque

$E_{j,i}$ est suivie par la forme que prend l'encadrement (4) lorsque $(k-j,k) \in E_{j,i})$:

$$E_{j,1} = \big\{(k-j,k) : j \leqslant k \leqslant x/a,\ (k-j+1)(k+1) \leqslant jx/c\big\}$$
$$\frac{x}{k-j+1} - b < n \leqslant \frac{x}{k} - a \tag{9}$$

$$E_{j,2} = \big\{(k-j,k) : j \leqslant k \leqslant x/a,\ (k-j)k > jx/c\big\}$$
$$\frac{x}{k+1} - a < n \leqslant \frac{x}{k-j} - b \tag{10}$$

$$E_{j,3} = \big\{(k-j,k) : j \leqslant k \leqslant x/a,\ (k-j)k \leqslant jx/c < (k-j+1)(k+1)\big\}$$
$$\frac{x}{k+1} - a < n \leqslant \frac{x}{k} - a \tag{11}$$

Celles des trois parties $E_{j,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ qui sont non vides forment une partition de E_j. Par conséquent, on a

$$W_j = W_{j,1} + W_{j,2} + W_{j,3},$$

où

$$W_{j,i} = \sum_{(h,k)\in E_{j,i}} W(h,k) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3).$$

Avant d'évaluer successivement les trois quantités $W_{j,i}$, nous allons définir, aux sous-paragraphes suivants, deux fonctions auxiliaires, K_j et N_j.

2.4 La fonction $K_j(t)$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, nous définissons $K_j(t)$ comme le plus grand nombre entier $k \geqslant j$ tel que $(k-j)k \leqslant jt$. En particulier, $K_0(t) = 0$.

Au moyen de la fonction $K_j(t)$, on peut, pour $j \geqslant 1$, récrire les conditions, quadratiques relativement à k, intervenant dans les définitions des ensembles $E_{j,i}$, sous les formes suivantes, respectivement :

$$k \leqslant K_j(x/c) - 1 \qquad (i=1) \tag{12}$$
$$k > K_j(x/c) \qquad (i=2) \tag{13}$$
$$k = K_j(x/c) \qquad (i=3) \tag{14}$$

De plus, la condition $k \leqslant x/a$, qui figure également dans la définition de ces ensembles, est superflue pour $i = 1, 3$, si $j \leqslant y = cx/ab$. En effet la relation $j \leqslant y$ peut s'écrire sous la forme

$$jx/c \leqslant \Big(\frac{x}{a} - j\Big)\frac{x}{a}\cdot$$

Les inégalités

$$\big(K_j(x/c) - j\big)K_j(x/c) \leqslant jx/c \quad ; \quad j \leqslant y \leqslant x/a,$$

et le fait que $t \mapsto (t-j)t$ est strictement croissante pour $t \geqslant j$ entraînent alors l'inégalité

$$K_j(x/c) \leqslant x/a. \tag{15}$$

2.5 La fonction $N_j(x;a,b)$

Pour exprimer la quantité $|j - cx/(n+a)(n+b)|$ sans valeur absolue, nous sommes conduits à définir, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N_j = N_j(x;a,b)$ comme le plus grand nombre entier n tel que
$$(n+a)(n+b) \leqslant cx/j.$$
On a donc $N_j \geqslant 0$ si $j \leqslant y = cx/ab$.

Établissons maintenant une relation entre les quantités $K_j = K_j(x/c)$ et $N_j = N_j(x;a,b)$.

Proposition 1. *Si $j \in \mathbb{N}^*$ et $j \leqslant y$, on a*
$$\Big\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \Big\rfloor \leqslant N_j \leqslant \Big\lfloor \frac{x}{K_j} - a \Big\rfloor.$$

Démonstration. L'encadrement définissant K_j,
$$(K_j - j)K_j \leqslant jx/c < (K_j + 1 - j)(K_j + 1)\,,$$
équivaut à
$$\frac{x}{K_j+1}\Big(\frac{x}{K_j+1} + c\Big) < \frac{cx}{j} \leqslant \frac{x}{K_j}\Big(\frac{x}{K_j} + c\Big),$$
c'est-à-dire à
$$\Big(\frac{x}{K_{j+1}} - a + a\Big)\cdot\Big(\frac{x}{K_{j+1}} - a + b\Big) < \frac{cx}{j} \leqslant \Big(\frac{x}{K_j} - a + a\Big)\cdot\Big(\frac{x}{K_j} - a + b\Big).$$

On a $N_j \geqslant 0$, et $t \mapsto (t+a)(t+b)$ est strictement croissante pour $t \geqslant -a$. Le dernier encadrement entraîne donc celui de l'énoncé. □

2.6 Calcul de $W_{j,1}$

Supposons $1 \leqslant j \leqslant y$. En notant simplement K_j pour $K_j(x/c)$, nous aurons, d'après (9), (12) et (15),
$$\begin{aligned} W_{j,1} &= \sum_{(h,k)\in E_{j,1}} W(h,k) \\ &= \sum_{j \leqslant k \leqslant K_j - 1} \ \sum_{\frac{x}{k-j+1} - b < n \leqslant \frac{x}{k} - a} \big|cx/(n+a)(n+b) - j\big|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si
$$\frac{x}{k-j+1} - b < \frac{x}{k} - a,$$
autrement dit seulement si $k > K_{j-1}$(rappelons que $K_0 = 0$). Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont strictement supérieurs à
$$\frac{x}{K_j - j} - b \geqslant \frac{x}{K_j} - a \geqslant N_j,$$

d'après la proposition 1.

Dans le calcul qui suit, ainsi qu'au paragraphe suivant, nous emploierons la fonction F définie par (7), et l'identité «$r-$télescopique»,

$$\sum_{\alpha<k\leqslant\beta}(u_k-u_{k-r})=\sum_{\beta-r<k\leqslant\beta}u_k-\sum_{\alpha-r<k\leqslant\alpha}u_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned}W_{j,1}&=\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\ \sum_{\frac{x}{k-j+1}-b<n\leqslant\frac{x}{k}-a}\big(j-cx/(n+a)(n+b)\big)\\&=j\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-a\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k-j+1}-b\right\rfloor\right)\\&\qquad-cx\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(F\left(\frac{x}{k-j+1}-b\right)-F\left(\frac{x}{k}-a\right)\right).\end{aligned}\tag{16}$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-a\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k-j+1}-b\right\rfloor\right)=$$
$$\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-a\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor\right)+\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k-j+1}-b\right\rfloor\right),$$

où, par l'identité « $(j-1)$-télescopique »,

$$\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k-j+1}-b\right\rfloor\right)=$$
$$\sum_{K_j-j<k\leqslant K_j-1}\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor-\sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}}\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor.$$

Une manipulation similaire s'applique à la dernière somme de (16), et on obtient finalement

$$\begin{aligned}W_{j,1}=j&\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(\left\lfloor\frac{x}{k}-a\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor\right)\\&+j\sum_{K_j-j<k\leqslant K_j-1}\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor-j\sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}}\left\lfloor\frac{x}{k}-b\right\rfloor\\&+cx\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_j-1}\left(F\left(\frac{x}{k}-a\right)-F\left(\frac{x}{k}-b\right)\right)\\&+cx\sum_{K_j-j<k\leqslant K_j-1}F\left(\frac{x}{k}-b\right)-cx\sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}}F\left(\frac{x}{k}-b\right).\end{aligned}\tag{17}$$

2.7 Calcul de $W_{j,2}$

On a ici, toujours pour $1 \leqslant j \leqslant y$, et d'après (10), (13) et (15),

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= \sum_{(h,k)\in E_{j,2}} W(h,k) \\ &= \sum_{K_j<k\leqslant x/a} \ \sum_{\frac{x}{k+1}-a<n\leqslant \frac{x}{k-j}-b} \big|cx/(n+a)(n+b)-j\big|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k+1}-a \leqslant \frac{x}{k-j}-b,$$

autrement dit seulement si $k \leqslant K_{j+1}-1$. Nous supposerons donc maintenant que $j \leqslant y-1$, de sorte que $K_{j+1} \leqslant x/a$, d'après (15). On obtient alors

$$W_{j,2} = \sum_{K_j<k\leqslant K_{j+1}-1} \ \sum_{\frac{x}{k+1}-a<n\leqslant \frac{x}{k-j}-b} \big|cx/(n+a)(n+b)-j\big|.$$

Les nombres entiers n intervenant dans la somme intérieure sont inférieurs ou égaux à

$$\frac{x}{K_j+1-j}-b < \frac{x}{K_j+1}-a,$$

par définition de K_j. La proposition 1 prouve alors que ces nombres entiers sont $\leqslant N_j$.

On a donc

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= \sum_{K_j<k\leqslant K_{j+1}-1} \ \sum_{\frac{x}{k+1}-a<n\leqslant \frac{x}{k-j}-b} \big(cx/(n+a)(n+b)-j\big) \\ &= j \sum_{K_j<k\leqslant K_{j+1}-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k+1}-a\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j}-b\right\rfloor\right) \\ &\quad + cx \sum_{K_j<k\leqslant K_{j+1}-1} \left(F\left(\frac{x}{k+1}-a\right) - F\left(\frac{x}{k-j}-b\right)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k}-a\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1}-b\right\rfloor\right) =$$

$$\sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k}-a\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k}-b\right\rfloor\right) + \sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k}-b\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1}-b\right\rfloor\right),$$

où, par l'identité « $(j+1)$-télescopique »,

$$\sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k}-b\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1}-b\right\rfloor\right) =$$

$$\sum_{K_{j+1}-j-1<k\leqslant K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k}-b\right\rfloor - \sum_{K_j-j<k\leqslant K_j+1} \left\lfloor \frac{x}{k}-b\right\rfloor.$$

Une manipulation similaire s'applique à la somme (18), et on obtient finalement

$$\begin{aligned} W_{j,2} = j &\sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b\right\rfloor\right) \\ &+ j \sum_{K_{j+1}-j-1<k\leqslant K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b\right\rfloor - j \sum_{K_j-j<k\leqslant K_j+1} \left\lfloor \frac{x}{k} - b\right\rfloor \\ &+ cx \sum_{K_j+1<k\leqslant K_{j+1}} \left(F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right)\right) \\ &+ cx \sum_{K_{j+1}-j-1<k\leqslant K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_j-j<k\leqslant K_j+1} F\left(\frac{x}{k} - b\right). \qquad (19) \end{aligned}$$

2.8 Calcul de $W_{j,3}$

Pour $1 \leqslant j \leqslant y$, on a, d'après (11), (14), et (15),

$$\begin{aligned} W_{j,3} &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a<n\leqslant \frac{x}{K_j}-a} \left|j - cx/(n+a)\,(n+b)\right| \\ &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a<n\leqslant N_j} \big(cx/(n+a)\,(n+b) - j\big) + \sum_{N_j<n\leqslant \frac{x}{K_j}-a} \big(j - cx/(n+a)\,(n+b)\big), \end{aligned}$$

d'après la proposition 1. Observons que l'avant-dernière somme est vide si $N_j = \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a\right\rfloor$.

On a

$$\begin{aligned} &\sum_{\frac{x}{K_j+1}-a<n\leqslant N_j} \big(cx/(n+a)\,(n+b) - j\big) \\ &\qquad = cx\left(F\left(\frac{x}{K_j+1} - a\right) - F(N_j)\right) - j\left(N_j - \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a\right\rfloor\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{N_j<n\leqslant \frac{x}{K_j}-a} \big(j - cx/(n+a)\,(n+b)\big) \\ &\qquad = j\left(\left\lfloor \frac{x}{K_j} - a\right\rfloor - N_j\right) - cx\left(F(N_j) - F\left(\frac{x}{K_j} - a\right)\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} W_{j,3} = cx &\left(F\left(\frac{x}{K_j+1} - a\right) + F\left(\frac{x}{K_j} - a\right) - 2F(N_j)\right) \\ &+ j\left(\left\lfloor \frac{x}{K_j} - a\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a\right\rfloor - 2N_j\right). \qquad (20) \end{aligned}$$

2.9 Expression de W_j pour $j \geqslant 1$

En regroupant les identités (17), (19) et (20), on obtient, pour $1 \leqslant j \leqslant y-1$,

$$\begin{aligned} W_j = j \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \Big(\Big\lfloor \frac{x}{k} - a \Big\rfloor - \Big\lfloor \frac{x}{k} - b \Big\rfloor \Big) \\ + j \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \Big\lfloor \frac{x}{k} - b \Big\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} \Big\lfloor \frac{x}{k} - b \Big\rfloor - 2jN_j \\ + cx \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \Big(F\Big(\frac{x}{k} - a\Big) - F\Big(\frac{x}{k} - b\Big) \Big) \\ + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} F\Big(\frac{x}{k} - b\Big) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} F\Big(\frac{x}{k} - b\Big) - 2cxF(N_j). \end{aligned} \tag{21}$$

3 Estimation des sommes W_j

Nous allons maintenant utiliser les identités obtenues au paragraphe précédent pour estimer les contributions à W des sommes W_j. Nous commençons par le cas $j = 0$.

3.1 La fonction K

Au §2.2, pour $t > 0$, nous avons introduit la notation $K(t)$ pour désigner le plus grand nombre entier k tel que $k(k+ 1) \leqslant t$, c'est-à-dire

$$K(t) = \lfloor \sqrt{t + 1/4} - 1/2 \rfloor,$$

et noté simplement K la valeur $K(x/c)$. Nous utiliserons l'encadrement

$$\sqrt{t} - 3/2 \leqslant \sqrt{t + 1/4} - 3/2 \leqslant K(t) \leqslant \sqrt{t}.$$

Proposition 2. *Pour $x \geqslant 9b^2/c$, on a*

$$\frac{x}{K+1} - b \geqslant \frac{\sqrt{cx}}{6}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{x}{K+1} - b \geqslant cK - b \geqslant c(\sqrt{x/c} - 3/2) - b \geqslant \sqrt{cx} - 5b/2 \geqslant \frac{\sqrt{cx}}{6},,$$

si $x \geqslant 9b^2/c$. □

3.2 Estimation de la fonction F

Rappelons la définition (7) :

$$F(t) = \sum_{n>t} 1/(n+a)(n+b).$$

Proposition 3. *Pour $b > a > 0$ et $t > 0$, on a*

$$F(t) = \frac{1}{t} + O\left((1+b)/t^2\right). \tag{22}$$

$$F(t) = \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + O\left((1+b)^2/t^3\right) \tag{23}$$

Démonstration. Nous démontrons (23) ; la démonstration de (22) est similaire, et plus simple.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} - \frac{1}{n^2} + \frac{a+b}{n^3} = \frac{(a^2+ab+b^2)n + ab(a+b)}{n^3(n+a)(n+b)} \leqslant \frac{3b^2}{n^4}.$$

Pour $t > 0$, on a

$$\sum_{n>t} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - 1/2}{t^2} + O(t^{-3})$$
$$\sum_{n>t} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2t^2} + O(t^{-3})$$
$$\sum_{n>t} \frac{1}{n^4} = O(t^{-3}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n>t} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{a+b}{n^3} + O(b^2/n^4) \right) \\ &= \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + O\left((1+b)^2/t^3\right). \end{aligned}$$ □

3.3 Estimation de W_0

Nous commençons par estimer le premier terme de l'expression (8) de W_0.

Proposition 4. *Pour $x \geqslant 9b^2/c$, on a*

$$F\big(x/(K+1) - a\big) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + O\big((1+b)/cx\big).$$

Démonstration. On a $K + 1 = \sqrt{x/c} + \vartheta_0$, où $|\vartheta_0| \leqslant 1$ et $\sqrt{x/c} \geqslant 3b/c \geqslant 3$. Par conséquent,

$$\frac{x}{K+1} - a = \frac{x}{\sqrt{x/c} + \vartheta_0} - a = \sqrt{cx} + O(b).$$

On a donc $x/(K+1) - a = \sqrt{cx}(1+\vartheta_1)$, avec $\vartheta_1 \geqslant -5/6$ (d'après la proposition 2), et $\vartheta_1 = O(b/\sqrt{cx})$. L'estimation (22) nous donne alors

$$F\big(x/(K+1) - a\big) = \frac{1 + O(b/\sqrt{cx})}{\sqrt{cx}} + O\big((1+b)/cx\big) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + O\big((1+b)/cx\big).$$ □

Passons à la somme apparaissant dans (8).

Proposition 5. *Pour $x \geqslant 9b^2/c$, on a*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \big(F(x/k-a) - F(x/k-b)\big) = \\ -\frac{1}{3\sqrt{cx}} + x^{-2} \sum_{1\leqslant k\leqslant K} k^2\big(\{x/k-a\} - \{x/k-b\}\big) + O\big((1+b)^2/c^2x\big).$$

Démonstration. Nous allons utiliser l'estimation (23). Par la proposition 2, les quantités $x/k-a$ et $x/k-b$, figurant dans la somme à évaluer, sont toutes $\geqslant \sqrt{cx}/6$. Par conséquent, la contribution à cette somme du terme d'erreur de (23) est

$$\ll (1+b)^2K/(cx)^{3/2} \leqslant (1+b)^2/c^2x.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant K$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x/k-a} - \frac{1}{x/k-b} &= -\frac{ck^2}{x^2}\left(1-\frac{ak}{x}\right)^{-1}\left(1-\frac{bk}{x}\right)^{-1}\\ &= -ck^2/x^2 + O(cbk^3/x^3),\end{aligned}$$

car $bk/x \leqslant 1/3$ si $1 \leqslant k \leqslant K$.

Par conséquent, la contribution à la somme étudiée du terme $1/t$ de (23) vaut

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant k\leqslant K}\left(\frac{1}{x/k-a} - \frac{1}{x/k-b}\right) &= -\frac{c}{x^2}\big(K^3/3 + O(K^2)\big) + O(cbK^4/x^3)\\ &= -\frac{1}{3\sqrt{cx}} + O(b/cx).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}&\frac{\{x/k-a\} - (a+b+1)/2}{(x/k-a)^2} - \frac{\{x/k-b\} - (a+b+1)/2}{(x/k-b)^2} = \\ &\qquad\big(\{x/k-a\} - (a+b+1)/2\big)\big(k^2/x^2 + O(bk^3/x^3)\big)\\ &\qquad\quad - \big(\{x/k-b\} - (a+b+1)/2\big)\big(k^2/x^2 + O(bk^3/x^3)\big)\\ &\qquad\qquad = k^2\big(\{x/k-a\} - \{x/k-b\}\big)/x^2 + O\big((1+b)^2k^3/x^3\big).\end{aligned}$$

La contribution du dernier terme d'erreur à la somme figurant dans (8) est

$$\ll (1+b)^2K^4/x^3 \ll (1+b)^2/c^2x.$$

Le résultat découle de ces estimations. □

Les propositions 4 et 5 et la formule (8) fournissent l'expression suivante de W_0.

Proposition 6. *Pour $x \geqslant 9b^2/c$, on a*

$$W_0 = \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0 + O\big((1+b)^2/c\big).$$

où

$$R_0 = \frac{c}{x}\sum_{1\leqslant k\leqslant K} k^2\big(\{x/k-a\} - \{x/k-b\}\big) \quad (x>0). \tag{24}$$

3.4 Grandes valeurs de j

Avant d'examiner en détail chaque quantité W_j, notons l'estimation suivante, qui nous permettra de limiter les valeurs de j à considérer.

Proposition 7. *Soit J un nombre réel supérieur à 1. Pour $x > 0$, et $b > a > 0$, on a*

$$\sum_{j>J} W_j < \sqrt{cx/(J-1)} + 1.$$

Démonstration. Si $j = \lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor > J$, alors

$$\frac{cx}{n^2} > \frac{cx}{(n+a)(n+b)} = j + \{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} > J - 1,$$

donc $n < \sqrt{cx/(J-1)}$. On en déduit que

$$\sum_{j>J} W_j \leqslant \sum_{0 \leqslant n < \sqrt{cx/(J-1)}} 1 < \sqrt{cx/(J-1)} + 1.$$

□

3.5 Résultats auxiliaires sur les quantités K_j

Nous allons utiliser les résultats, démontrés dans [1], concernant les fonctions $K_j(t)$, dont la définition a été rappelée au §2.4, ici évaluées en $t = x/c$.

Pour $0 \leqslant j \leqslant x/c$ et $x \geqslant c$, les propositions 2 et 3, p. 12 de [1], affirment que

$$K_{j+1} - K_j = \big(\sqrt{j+1} - \sqrt{j}\,\big)\sqrt{x/c} + O(1) \tag{25}$$

$$\sum_{K_j < k \leqslant K_{j+1}} k^2 = \frac{(j+1)\sqrt{j+1} - j\sqrt{j}}{3}\,(x/c)^{3/2} + O\big((j+1)x/c\big). \tag{26}$$

Notons que (25) entraîne

$$K_{j+1} - K_j \ll (x/cj)^{1/2} \quad (0 < j \leqslant x/c). \tag{27}$$

L'encadrement (17), p. 11 de [1] se récrit

$$\sqrt{jx/c} + j/2 - 1 < K_j \leqslant \sqrt{jx/c} + j. \tag{28}$$

En particulier, pour $0 < j \leqslant x/c$, on a

$$K_j \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{jx/c}\,, \tag{29}$$

et

$$K_{j+1} \leqslant \sqrt{(j+1)x/c} + j + 1 \leqslant 2\sqrt{jx/c} + 2j \leqslant 4\sqrt{jx/c}. \tag{30}$$

Les quatre propositions suivantes sont des lemmes utilisés lors des calculs des paragraphes suivants.

Proposition 8. *Pour* $0 < j \leqslant x/c$ *et* $K_{j-1} < k \leqslant K_{j+1}$, *on a*

$$-1 < ck^2/x - j \leqslant 1 + 8j^{3/2}(c/x)^{1/2}.$$

Démonstration. En effet, par définition de $K_{j\pm1}$, on a, pour $K_{j-1} < k \leqslant K_{j+1}$,

$$(j-1)x/c + (j-1)k < k^2 \leqslant (j+1)x/c + (j+1)k,$$

donc

$$-1 + (j-1)kc/x < ck^2/x - j \leqslant 1 + (j+1)kc/x.$$

L'encadrement annoncé résulte alors de la majoration $K_{j+1} \leqslant 4\sqrt{jx/c}$. □

Proposition 9. *Pour* $0 < j \leqslant x/c$

$$\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} |k^2c/x - j| \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

Démonstration. En utilisant (27) et la proposition 8, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} |k^2c/x - j| &\ll (x/cj)^{1/2}\bigl(1 + j^{3/2}(c/x)^{1/2}\bigr)\\ &= (x/cj)^{1/2} + j.\end{aligned}$$ □

Proposition 10. *Pour* $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2$ *et* $k \leqslant K_j$, *on a*

$$\lfloor x/k - b\rfloor \geqslant \frac{5}{12}\sqrt{cx/j} \tag{31}$$

$$x/k - b \geqslant x/2k. \tag{32}$$

Démonstration. En utilisant (28), on a, d'une part,

$$\lfloor x/k - b\rfloor \geqslant x/K_j - b - 1 \geqslant \frac{x}{\sqrt{jx/c} + j} - b - 1 \geqslant \frac{3}{4}\sqrt{cx/j} - b - 1 \geqslant \frac{5}{12}\sqrt{cx/j}.$$

D'autre part,

$$kb \leqslant K_j b \leqslant b\sqrt{jx/c} + jb \leqslant \frac{bx}{3(1+b)} + \frac{bcx}{9(1+b)^2} \leqslant \frac{x}{2}.$$ □

Proposition 11. *Pour* $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2$ *et* $K_j - j < k \leqslant K_j$, *on a*

$$j\lfloor x/k - b\rfloor + cx/\lfloor x/k - b\rfloor = 2\sqrt{jcx} + O\bigl((1+b)^2 j^{3/2}(cx)^{-1/2}\bigr).$$

Démonstration. Il s'agit d'une adaptation de la proposition 5, p. 17 de [1].

Posons $q = \lfloor x/k - b\rfloor$. On a

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = p^2,$$

où

$$p = \sqrt{jq} - \sqrt{cx/q} = \frac{jq^2 - cx}{q\big(\sqrt{jq} + \sqrt{cx/q}\big)}.$$

D'après (28), on a

$$\sqrt{jx/c} + j \geqslant K_j \geqslant k \geqslant K_j - j + 1 \geqslant \sqrt{jx/c} - j/2 \geqslant \frac{5}{6}\sqrt{jx/c},$$

donc, compte également tenu de la proposition 10,

$$q = \lfloor x/k - b \rfloor = x/k + O(1+b) = \frac{x}{\sqrt{jx/c} + O(j)} + O(1+b) = \sqrt{cx/j} + O(1+b). \quad (33)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} jq^2 - cx &= O\big((1+b)\sqrt{cjx}\,\big) \\ p &= O\big((1+b)j^{3/4}(cx)^{-1/4}\big) \end{aligned}$$

et

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = O\big((1+b)^2 j^{3/2}(cx)^{-1/2}\big). \qquad \square$$

3.6 Estimation de W_j pour $j \geqslant 1$

Commençons en observant que la condition $j \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1$, qui va figurer dans les trois premiers énoncés de ce sous-paragraphe, entraîne l'inégalité $j \leqslant y - 1$, condition d'application de l'identité (21).

Nous estimons en premier lieu la contribution à W_j des sommes de (21) où a ne figure pas.

Proposition 12. *Pour* $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1$, *on a*

$$\begin{aligned} j &\sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\ &+ cx \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) \\ &= \big((2j+1)\sqrt{j+1} - (2j-1)\sqrt{j-1}\big)\sqrt{cx} \\ &\qquad + O\big((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}\big) + O\big((1+b)j\big). \end{aligned} \quad (34)$$

Démonstration. Observons que, si $j = 1$, la deuxième et la quatrième somme sont vides.

Pour $t \geqslant 1$, nous récrivons (23) sous la forme

$$F(t) = \frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{a+b+1}{2t^2} + O\left((1+b)^2/t^3\right) \quad (35)$$

D'après (31), la contribution à la troisième et quatrième somme de (34) du terme d'erreur de (35) est

$$\ll j(1+b)^2(cx/j)^{-3/2} = j^{5/2}(1+b)^2(cx)^{-3/2}. \quad (36)$$

On a ensuite, en utilisant (33) et (31),

$$\sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \frac{1}{(x/k-b)^2} = \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \Big(\frac{j+1}{cx} + O\Big((1+b)\Big(\frac{j}{cx}\Big)^{3/2}\Big)\Big)$$
$$= \frac{(j+1)^2}{cx} + O\big(j^{5/2}(1+b)(cx)^{-3/2}\big), \tag{37}$$

et, de même,

$$\sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} \frac{1}{(x/k-b)^2} = (j-1)^2/cx + O\big(j^{5/2}(1+b)(cx)^{-3/2}\big). \tag{38}$$

La proposition 11 et (33) nous donnent

$$\sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \big(j\lfloor x/k-b\rfloor + cx/\lfloor x/k-b\rfloor\big)$$
$$= \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \big(2\sqrt{(j+1)cx} + O\big((1+b)^2 j^{3/2}(cx)^{-1/2}\big)$$
$$- \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leqslant K_{j+1}} \lfloor x/k-b\rfloor$$
$$= (2j+1)\sqrt{(j+1)cx} + O\big((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}\big) + O\big((1+b)j\big) \tag{39}$$

et, de même,

$$\sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leqslant K_{j-1}} \big(j\lfloor x/k-b\rfloor + cx/\lfloor x/k-b\rfloor\big) =$$
$$= (2j-1)\sqrt{(j-1)cx} + O\big((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}\big) + O\big((1+b)j\big) \tag{40}$$

En regroupant les résultats (36), (37), (38), (39) et (40), on obtient le résultat annoncé. □

Passons maintenant à la contribution à W_j des sommes de (21) où figure a.

Proposition 13. *Pour $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$j \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \Big(\Big\lfloor \frac{x}{k} - a\Big\rfloor - \Big\lfloor \frac{x}{k} - b\Big\rfloor\Big) + cx \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \Big(F\Big(\frac{x}{k}-a\Big) - F\Big(\frac{x}{k}-b\Big)\Big)$$
$$= \frac{(2j-1)\sqrt{j+1} - (2j+1)\sqrt{j-1}}{3}\sqrt{cx} + R_j + O\big((1+b)^2 j/c\big), \tag{41}$$

avec

$$R_j = R_j(x;a,b) = \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} (k^2c/x - j)\big(\{x/k-a\} - \{x/k-b\}\big).$$

Démonstration. D'après la proposition 10 et (27), la contribution à la seconde somme du terme d'erreur de (23) est

$$\ll (K_{j+1}-K_{j-1})(1+b)^2(cx/j)^{-3/2} \ll (1+b)^2 j/c^2x.$$

Pour $k \leqslant K_{j+1}$, l'inégalité (32) nous permet d'écrire

$$\frac{\{x/k-b\}-(a+b+1)/2}{(x/k-b)^2} = \frac{k^2}{x^2}\big(\{x/k-b\}-(a+b+1)/2\big) + O\big((1+b)^2k^3/x^3\big).$$

La contribution à cette seconde somme du terme $\big(\{t\}-(a+b+1)/2\big)/t^2$ de (23) est donc

$$x^{-2}\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} k^2\big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big) + O\big((1+b)^2j/c^2x\big).$$

En utilisant (26), (27) et (32), on voit que la contribution du terme $1/t$ de (23) est

$$\begin{aligned}\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \Big(\frac{1}{x/k-a}-\frac{1}{x/k-b}\Big) &= -\frac{c}{x^2}\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \big(k^2+O(bk^3/x)\big)\\ &= -\frac{(j+1)\sqrt{j+1}-(j-1)\sqrt{j-1}}{3\sqrt{cx}} + O(bj/cx).\end{aligned}$$

Enfin, la première somme du premier membre de (41) vaut, d'après (25),

$$\begin{aligned}&c(K_{j+1}-K_{j-1}) - \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big) =\\ &\qquad (\sqrt{j+1}-\sqrt{j-1})\sqrt{cx} + O(c) - \sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big).\end{aligned}$$

On obtient la relation (41) en collectant ces estimations. □

Notons que la majoration « triviale » de R_j est donnée par la proposition 9 :

$$R_j \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

Estimons enfin la contribution à W_j des termes de (21) où figure N_j.

Proposition 14. *Pour* $0<j\leqslant cx/9(1+b)^2$, *on a*

$$jN_j + cxF(N_j) = 2\sqrt{jcx} + O\big((1+b)j\big).$$

Démonstration. Rappelons que N_j est le plus grand nombre entier n tel que

$$(n+a)(n+b) \leqslant cx/j.$$

On a donc

$$N_j = \Big\lfloor \sqrt{cx/j+c^2/4}-(a+b)/2 \Big\rfloor .$$

En particulier,

$$\sqrt{cx/j} - (a+b)/2 - 1 \leqslant N_j \leqslant \sqrt{cx/j}.$$

Pour $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2$, la borne inférieure de cet encadrement de N_j est $\geqslant \frac{2}{3}\sqrt{cx/j}$. Par suite, en utilisant (22),

$$\begin{aligned} jN_j + cxF(N_j) &= j\Big(\sqrt{\frac{cx}{j}} + O(1+b)\Big) + cx\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\frac{cx}{j}} + O(1+b)} + O\Big(\frac{1+b}{\frac{cx}{j}}\Big)\Bigg) \\ &= 2\sqrt{jcx} + O\big((1+b)j\big). \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'adapter la proposition 6, p. 18 de [1].

Proposition 15. *Pour $0 < j \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$W_j = f(j)\sqrt{cx} + R_j + O\big((1+b)^2 j/c\big) + O\big((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}\big).$$

avec

$$f(j) = \frac{8j+2}{3}\sqrt{j+1} - \frac{8j-2}{3}\sqrt{j-1} - 4\sqrt{j},$$

et où R_j est défini par (3).

Démonstration. On obtient cette estimation en insérant dans (21) les résultats des propositions 12, 13 et 14. □

4 Estimation de la somme $W(x; a, b)$

4.1 Mise en évidence du terme principal

Nous donnons d'abord une expression de $W = W(x; a, b)$ faisant intervenir un paramètre réel J.

Proposition 16. *Pour x et J réels tels que $3/2 \leqslant J \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O\big((1+b)^2 J^2/c\big) + O\big((cx/J)^{1/2}\big) + O\big((1+b)^2 J^{7/2}(cx)^{-1/2}\big),$$

où l'on a posé

$$\mathcal{R}(J) = R_0 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} R_j,$$

les quantités R_j étant définies par (2) $(j = 0)$ et (3) $(j > 0)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
W &= W_0 + \sum_{1\leqslant j\leqslant J} W_j + \sum_{j>J} W_j \\
&= W_0 + \sum_{1\leqslant j\leqslant J} W_j + O\big((cx/J)^{1/2}\big) \quad \text{(d'après la proposition 7, et car } 1 \leqslant cx/J) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0 + O\big((1+b)^2/c\big) \\
&\qquad + \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \Big(f(j)\sqrt{cx} + R_j + O\big((1+b)^2 j/c\big) + O\big((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}\big)\Big) \\
&\qquad\qquad + O\big((cx/J)^{1/2}\big) \quad \text{(d'après les propositions 6 et 15)} \\
&= \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O\big((1+b)^2 J^2/c\big) + O\big((cx/J)^{1/2}\big) + O\big((1+b)^2 J^{7/2}(cx)^{-1/2}\big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la somme de la série

$$\frac{2}{3} + \sum_{j\geqslant 1} f(j) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2) \qquad \text{(cf. [1], (35), p. 20),}$$

et l'estimation $f(j) \ll j^{-3/2}$. □

En restreignant l'intervalle de variation de J, simplifions légèrement l'énoncé de la proposition 16.

Proposition 17. *Pour $x \geqslant 40(1+b)^3c^{-2}$ et J tel que $3/2 \leqslant J \leqslant (x/c)^{1/3}$, on a*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O\big((1+b)^2J^2/c\big) + O\big((cx/J)^{1/2}\big).$$

Démonstration. D'une part, on vérifie que

$$x \geqslant 40(1+b)^3c^{-2} \Rightarrow (x/c)^{1/3} \leqslant cx/9(1+b)^2 - 1.$$

D'autre part, on a

$$J \leqslant (x/c)^{1/3} \Leftrightarrow (1+b)^2J^{7/2}(cx)^{-1/2} \leqslant (1+b)^2J^2/c.$$ □

4.2 Démonstration du Théorème A

Proposition 18. *Pour $x \geqslant 40(1+b)^4/c^3$,*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O\big((1+b)^{2/5}c^{1/5}x^{2/5}\big),$$

où $J = c^{3/5}(1+b)^{-4/5}x^{1/5}$.

Démonstration. Nous choisissons J pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur de la proposition 16 :

$$J = c^{3/5}(1+b)^{-4/5}x^{1/5}.$$

On vérifie que

$$x \geqslant 40(1+b)^4/c^3 \Rightarrow 3/2 \leqslant J \leqslant (x/c)^{1/3},$$

et les deux termes d'erreur de la proposition 17 sont

$$\ll (1+b)^{2/5}c^{1/5}x^{2/5}.$$ □

5 Démonstration du Théorème B

5.1 Rappels sur la théorie de van der Corput

Afin d'estimer la somme $\mathcal{R}(J)$, nous utiliserons l'énoncé suivant, dû à van der Corput, qui résulte de la version la plus simple de sa méthode d'estimation de sommes trigonométriques (cf. [4], Satz 5, p. 252 ; [3], Satz 1, p. 215 ; [2], (12), p. 23).

Soit u, v des nombres réels tels que $v - u \geqslant 1$, et $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est monotone et de signe constant. On a alors

$$\sum_{u<n\leqslant v} (\{f(n)\} - 1/2) \ll \int_u^v |f''(t)|^{1/3}\, dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(v)|}}, , \tag{42}$$

où la constante implicite est absolue.

Par sommation partielle, on déduit de (42) l'estimation suivante.

Soit u, v des nombres entiers tels que $u \leqslant v$, et $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est monotone et de signe constant. Soit $(\gamma_n)_{u<n\leqslant v}$ une suite de nombres réels. On a alors

$$\sum_{u<n\leqslant v} \gamma_n (\{f(n)\} - 1/2) \ll G \int_u^v |f''(t)|^{1/3}\, dt + \frac{G}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{G}{\sqrt{|f''(v)|}}, \tag{43}$$

où

$$G = \max_{u<n\leqslant v} |\gamma_n| + \sum_{u<n<v} |\gamma_{n+1} - \gamma_n|,$$

et où la constante implicite est absolue.

5.2 Estimation de la somme $\mathcal{R}(J)$

Proposition 19. *Pour $2 \leqslant j \leqslant (x/c)^{1/3}$, on a*

$$R_j \ll x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}.$$

Démonstration. Pour $K_{j-1} < k \leqslant K_{j+1}$, posons

$$\gamma_k = \gamma_k(x, c, j) = ck^2/x - j.$$

La suite (γ_k) étant croissante, la proposition 8 implique l'estimation

$$\max_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} |\gamma_n| + \sum_{K_{j-1}<k<K_{j+1}} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \ll 1 + j^{3/2}(c/x)^{1/2} \ll 1,$$

en tenant compte de l'hypothèse $j \leqslant (x/c)^{1/3}$.

En appliquant (43) aux deux fonctions $f(t) = x/t - a$ et $f(t) = x/t - b$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{K_{j-1}<k\leqslant K_{j+1}} \gamma_k\Big(\Big\{\frac{x}{k}-a\Big\}-\Big\{\frac{x}{k}-b\Big\}\Big) &\ll \int_{K_{j-1}}^{K_{j+1}} \Big(\frac{x}{t^3}\Big)^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j-1}^3}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j+1}^3}} \\ &\ll x^{1/3}\ln\frac{K_{j+1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2}K_{j+1}^{3/2} \\ &\ll x^{1/3}\frac{K_{j+1}-K_{j-1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2}(jx/c)^{3/4} \\ &\qquad \text{(d'après (30))} \\ &\ll x^{1/3}j^{-1} + x^{1/4}j^{3/4}c^{-3/4},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (25) et (29). □

Proposition 20. *Pour $x \geqslant 1 + c$, on a*

$$R_0 + R_1 \ll x^{1/3}\ln(2x/c) + c^{-3/4}x^{1/4}.$$

Démonstration. On a

$$R_0+R_1 = \frac{c}{x}\sum_{1\leqslant k\leqslant K} k^2\big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big) + \sum_{0<k\leqslant K_2}(k^2c/x-1)\big(\{x/k-a\}-\{x/k-b\}\big).$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 19 fournit l'estimation

$$\begin{aligned}R_0 + R_1 &\ll 1 + \int_1^{K_2}(x/t^3)^{1/3}\,dt + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_2^3}} \\ &\ll x^{1/3}\ln(2x/c) + c^{-3/4}x^{1/4}.\end{aligned}$$ □

Proposition 21. *Pour x et J réels tels que $3/2 \leqslant J \leqslant \big(x/(1+c)\big)^{1/3}$, on a*

$$\mathcal{R}(J) \ll x^{1/3}\ln(x/c) + x^{1/4}J^{7/4}c^{-3/4}.$$

Démonstration. D'après les propositions 19 et 20, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(J) &= \sum_{0\leqslant j\leqslant J} R_j \\ &\ll x^{1/3}\ln(x/c) + \sum_{0<j\leqslant J}\big(x^{1/3}j^{-1} + x^{1/4}j^{3/4}c^{-3/4}\big) \\ &\ll x^{1/3}\ln(x/c) + x^{1/4}J^{7/4}c^{-3/4}.\end{aligned}$$ □

5.3 Conclusion

Proposition 22. *Pour $x \geqslant 40\,c^{-5}(1+b)^{27/2}$,*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + O(c^{2/9}x^{4/9}).$$

Démonstration. Pour

$$x \geqslant 40(1+b)^3 c^{-2} \tag{44}$$

et $3/2 \leqslant J \leqslant \big(x/(1+c)\big)^{1/3}$, la conjonction des résultats des propositions 17 et 21 montre que

$$W - \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} \ll (cx/J)^{1/2} + x^{1/4}J^{7/4}c^{-3/4} + x^{1/3}\ln(x/c) + (1+b)^2J^2/c.$$

Nous choisissons J pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur : $J = c^{5/9}x^{1/9}$. Cette quantité vérifie l'encadrement $3/2 \leqslant J \leqslant \big(x/(1+c)\big)^{1/3}$ si

$$x \geqslant 40 \max\big(c^{-5}, (1+c)^4\big). \tag{45}$$

On a alors, d'une part,

$$(cx/J)^{1/2} + x^{1/4}J^{7/4}c^{-3/4} \asymp c^{2/9}x^{4/9}.$$

D'autre part, sous les hypothèses (44) et (45), on a

$$x^{1/3}\ln(x/c) \ll x^{1/3}(x/c)^{1/18} \ll c^{2/9}x^{4/9},$$

et l'inégalité

$$x \geqslant c^{-1/2}(1+b)^9 \tag{46}$$

entraîne

$$(1+b)^2J^2/c \asymp (1+b)^2c^{1/9}x^{2/9} \ll c^{2/9}x^{4/9},$$

Si $x \geqslant 40\, c^{-5}(1+b)^{27/2}$, les trois conditions (44), (45) et (46) sont vérifiées, et le résultat est démontré. □

Remerciements

Le premier auteur remercie Julien Cassaigne de lui avoir suggéré de généraliser à $W(x;a,b)$ l'étude, effectuée dans [1], du cas $a=1$, $b=2$.

Références

[1] M. Balazard: Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs. *Mosc. J. Comb. Number Theory* 7 (2017) 3–23.

[2] J.G. van der Corput: Méthodes d'approximation dans le calcul du nombre des points à coordonnées entières. *Enseign. Math.* 23 (1923) 5–29.

[3] J.G. van der Corput: Neue zahlentheoretische Abschätzungen. *Math. Ann.* 89 (1923) 215–254.

[4] J.G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. *Math. Z.* 17 (1923) 250–259.

[5] A. Wintner: Square root estimates of arithmetical sum functions. *Duke Math. J.* 13 (1946) 185–193.

Received: 19 July, 2019
Accepted for publication: 29 July, 2019
Communicated by: Yuri Bilu